ガウスの発散定理

三次元空間内に直交デカルト座標 (x, y, z) を定め、この空間内の閉曲面を S, その内部領域を V とする。そこで定義された連続関数 $L(x, y, z)$, $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ があるとする。ガウスの発散定理は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}&\int\int\int_V \left(g\frac{\partial L}{\partial x} + g\frac{\partial M}{\partial y} + g\frac{\partial N}{\partial z}\right) dxdydz \\ &= \int\int_S (gLl + gMm + gNn)\, dS - \int\int\int_V \left(\frac{\partial g}{\partial x}L + \frac{\partial g}{\partial y}M + \frac{\partial g}{\partial z}N\right) dxdydz\end{aligned} \tag{1}$$

ここに、(l, m, n) は S 面上で外向きに引いた法線の方向余弦である。すなわち、ν を外向きの法線, (x, ν), (y, ν), (z, ν) を法線と x, y, z 軸のなす角とすると、$l = \cos(x, \nu)$, $m = \cos(y, \nu)$, $n = \cos(z, \nu)$ である。

左辺第一項のみ考える。

$$\int\int\int_V \frac{\partial L}{\partial x} g(x, y, z) dxdydz = \int\int \left(\int g\frac{\partial L}{\partial x} dx\right) dydz \tag{2}$$

カッコ内の積分は、或る y と z を一定として、領域 V の範囲内の x にわたる $g\frac{\partial L}{\partial x}$ の積分を意味する。積分の x の範囲を $x_1 \leq x \leq x_2$ とする。x_1, x_2 は y と z の値によって変化する。x に関する積分だけ取り出すと、

$$\int_{x_1}^{x_2} g\frac{\partial L}{\partial x} dx \tag{3}$$

部分積分すると、

$$\int_{x_1}^{x_2} g\frac{\partial L}{\partial x} dx = \left[g\int \frac{\partial L}{\partial x} dx\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x}\int \frac{\partial L}{\partial x} dxdx = [gL]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x} Ldx \tag{4}$$

元の積分に戻すと、

$$\int\int \left([gL]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x} Ldx\right) dydz = \int\int [gL]_{x_1}^{x_2}\, dydz - \int\int\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x} Ldxdydz \tag{5}$$

右辺第一項は

$$\int\int [gL]_{x_1}^{x_2}\, dydz \tag{6}$$

被積分関数は、$x = x_1$ および $x = x_2$ における gL の値の差である。

$$[gL]_{x_1}^{x_2} = g(x = x_2, y, z)L(x = x_2, y, z) - g(x = x_1, y, z)L(x = x_1, y, z) \tag{7}$$

これを、元の積分に戻すと、

$$\int\int (g(x = x_2, y, z)L(x = x_2, y, z) - g(x = x_1, y, z)L(x = x_1, y, z))\, dydz \tag{8}$$

いま、$dydz$ で囲まれた矩形柱が $x = x_2$ の側において表面 S を切り取ってできる面積を dS とし、dS において外向きに引いた単位長さの法線ベクトルを ν, その x, y, z 軸方向の成分を l, m, n とする。

$$\boldsymbol{\nu} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} \tag{9}$$

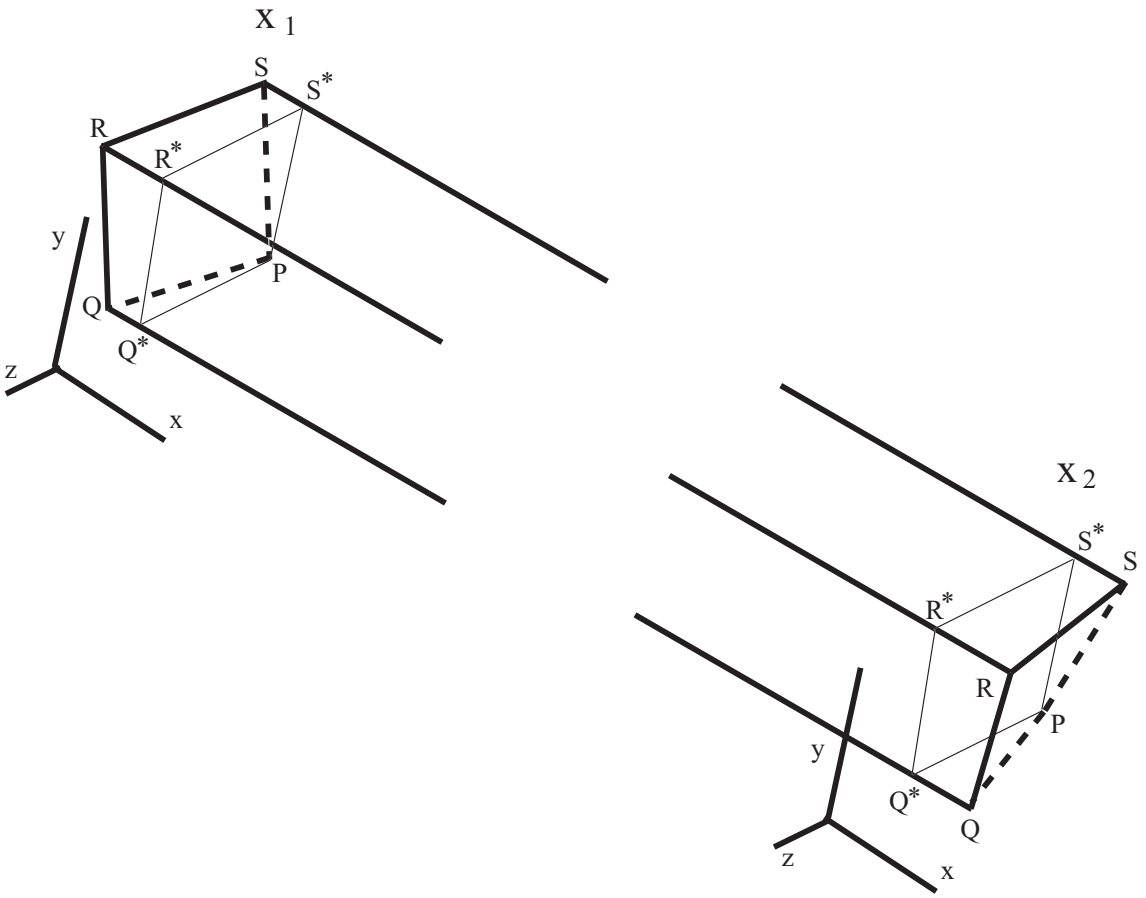

図 Gaussian divergence theorem 1

ここで、$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトルである。dS を微小四角形 **PQRS** とみなし、点 **P** を通る (y, z) 面に平行な平面と矩形柱の交点を Q^*, R^*, S^*, とする。$QQ^* = dx_Q$, $SS^* = dx_S$ とすると、

$$\vec{PQ} = dz\boldsymbol{k} + dx_Q\boldsymbol{i} \tag{10}$$

$$\vec{PS} = dy\boldsymbol{j} + dx_S\boldsymbol{i} \tag{11}$$

であるので、

$$\boldsymbol{\nu}dS = \vec{PS} \times \vec{PQ} = (dy\boldsymbol{j} + dx_S\boldsymbol{i}) \times (dz\boldsymbol{k} + dx_Q\boldsymbol{i}) \tag{12}$$

$$= dydz\boldsymbol{i} - dx_Q dy\boldsymbol{k} - dx_S dz\boldsymbol{j} \tag{13}$$

定義より、

$$\boldsymbol{\nu}dS = ldS\boldsymbol{i} + mdS\boldsymbol{j} + ndS\boldsymbol{k} \tag{14}$$

よって、次式が導かれる。

$$dydz = ldS \tag{15}$$

同様に、$dydz$ で囲まれた矩形柱が $x = x_1$ の側において表面 S を切り取ってできる面積を dS とし、dS において外向きに引いた単位長さの法線ベクトルを ν, その x, y, z 軸方向の成分を l, m, n とする。

$$\boldsymbol{\nu} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} \tag{16}$$

dS を微小四角形 **PQRS** とみなし、点 **P** を通る (y, z) 面に平行な平面と矩形柱の交点を Q^*, R^*, S^*, とする。$QQ^* = dx_Q$, $SS^* = dx_S$ とすると、

$$\vec{PQ} = dz\boldsymbol{k} - dx_Q\boldsymbol{i} \tag{17}$$

$$\vec{PS} = dy\boldsymbol{j} - dx_S\boldsymbol{i} \tag{18}$$

であるので、

$$\boldsymbol{\nu}dS = \vec{PQ} \times \vec{PS} = (dz\boldsymbol{k} - dx_Q\boldsymbol{i}) \times (dy\boldsymbol{j} - dx_S\boldsymbol{i}) \tag{19}$$

$$= -dydz\boldsymbol{i} + dx_Q dz\boldsymbol{j} + dx_S dy\boldsymbol{k} \tag{20}$$

定義より、

$$\boldsymbol{\nu}dS = ldS\boldsymbol{i} + mdS\boldsymbol{j} + ndS\boldsymbol{k} \tag{21}$$

よって、次式が導かれる。

$$dydz = -ldS \tag{22}$$

元の体積積分は

$$\int\int\int_V g\frac{\partial L}{\partial x}dxdydz = \int\int\left(\int g\frac{\partial L}{\partial x}dx\right)dydz = \int\int [gL]_{x_1}^{x_2}\,dydz - \int\int\int_V \frac{\partial g}{\partial x}Ldxdydz \tag{23}$$

表面 S を「１」の側と「２」の側に分ける。

$$\begin{aligned}
&= \int\int g(x = x_2, y, z)L(x = x_2, y, z)dydz - \int\int g(x = x_1, y, z)L(x = x_1, y, z)dydz \\
&- \int\int\int_V \frac{\partial g}{\partial x}Ldxdydz \\
&= \int\int g(x = x_2, y, z)L(x = x_2, y, z)ldS + \int\int g(x = x_1, y, z)L(x = x_1, y, z)ldS \\
&- \int\int\int_V \frac{\partial g}{\partial x}Ldxdydz
\end{aligned} \tag{24}$$

再び、表面 S 全体の積分と考えて、

$$= \int\int_S gLldS - \int\int\int_V \frac{\partial g}{\partial x}Ldxdydz \tag{25}$$

以上より、

$$\int\int\int_V g\frac{\partial L}{\partial x}dxdydz = \int\int_S gLldS - \int\int\int_V \frac{\partial g}{\partial x}Ldxdydz \tag{26}$$

同様にして、x, z 一定、x, y 一定の矩形柱を考えれば、

$$dxdz = \pm mdS \tag{27}$$

$$dxdy = \pm n dS \tag{28}$$

が導かれる。よって、ガウスの発散定理が導かれる。

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_V \left(g\frac{\partial L}{\partial x} + g\frac{\partial M}{\partial y} + g\frac{\partial N}{\partial z} \right) dxdydz \\
&= \int\int_S (gLl + gMm + gNn)\, dS - \int\int\int_V \left(\frac{\partial g}{\partial x}L + \frac{\partial g}{\partial y}M + \frac{\partial g}{\partial z}N \right) dxdydz
\end{aligned} \tag{29}$$